Marchés financiers
et gestion de portefeuille

(Partie II)

Youssef LAHARACH

Avec la collaboration de Lamiaa CHAB

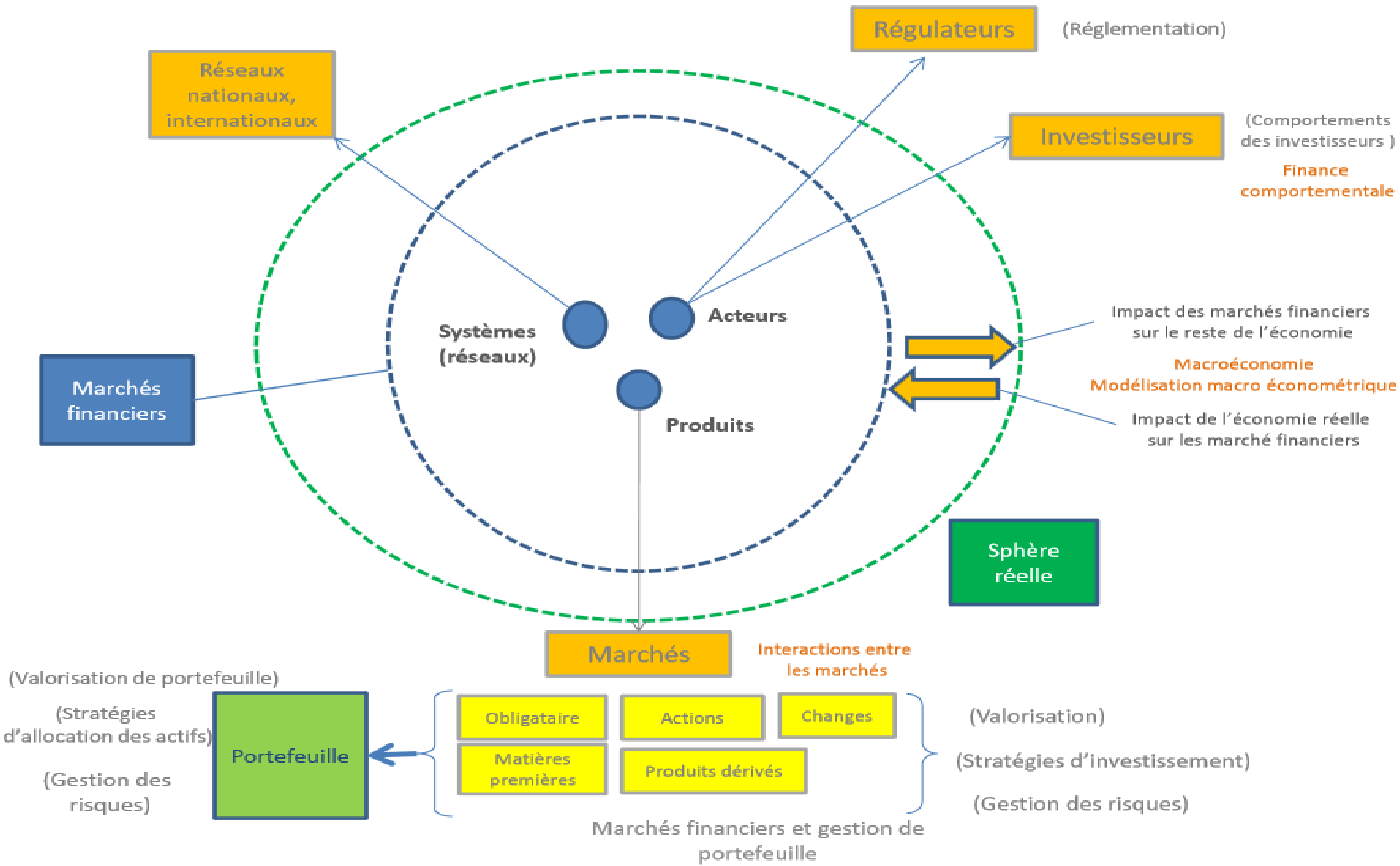
+

-

Email : ylaharach@gmail.com

Site personnel :http://laharach-youssef.e-monsite.com/

Introduction :



Régulateurs
(Réglementation)
Réseaux nationaux, internationaux
Investisseurs
(Comportements des investisseurs)
Finance comportementale
Systèmes (réseaux)
Acteurs
Impact des marchés financiers sur le reste de l'économie
Macroéconomie
Modélisation macro économétrique
Marchés financiers
Produits
Impact de l'économie réelle sur les marché financiers
Sphère réelle
Marchés
Interactions entre les marchés
(Valorisation de portefeuille)
(Stratégies d'allocation des actifs)
(Gestion des risques)
Portefeuille
Obligataire
Actions
Changes
Matières premières
Produits dérivés
(Valorisation)
(Stratégies d'investissement)
(Gestion des risques)
Marchés financiers et gestion de portefeuille

Chapitre 3 : Les Actions

Plan du chapitre 3 :

1. Définitions et notions de base
2. Rendement de l’action
3. Price Eearning Ratio (RER)
4. Rendement d’un portefeuille actions
5. Rendement du marché
6. Paramètres d’évaluation des actions
7. Modèle de Gordon-Shapiro
8. Limite du Modèle G-S
9. Arbitrage Dividende actuel ou futur
10. Modèle de croissance simple
11. Modèle d’actualisation des dividendes augmenté

1. Définitions

- **Financement de l'actif :**

  - **Capitaux propres** (émission des actions pour l'augmentation de capital).
  - **Endettement** : Emprunt bancaire, emprunt obligataire.

- **Deux catégories d'investisseurs :** les actionnaires et les créanciers

- **Créanciers (dettes) :**

  - **Rémunération fixe indépendante du résultat ;**
  - **Échéance de remboursement définie ;**
  - **Priorité de remboursement.**

- **Actionnaires (capitaux propres) :**

  - **Rémunération variable (dividende) ;**
  - **Aucune garantie de remboursement ;**
  - **Remboursement en dernier ou pas de remboursement.**

- **Une action : un titre financier, avec flux financiers incertains, bénéficiant d'un droit au vote.**

  - **Actions nominatives :** émises par les sociétés non côtés, non des actionnaires connu et nombre d'actions détenu connu.

- **Actions au porteur :** émises par les sociétés côtés, actionnaires anonymes et nombre d'action détenu est inconnu.

2. Rendement

Est le rapport entre le dernier dividende de cette action et son cours actuel.

$$\text{Rendement} = \frac{Dividende}{Cours}$$

3. Price Eearning Ratio (PER)

Est le rapport entre le cours d'une action et le bénéfice net (de la société) par action.

$$\text{PER} = \frac{Cours\ de\ l'action}{Bénéfice\ net\ par\ action} = \frac{Capitalisation\ boursière}{Bénéfice\ net\ de\ la\ societé}$$

- Le bénéfice net d'une société est obtenu après avoir retiré du bénéfice :

➔ Les amortissements ;
➔ Les provisions ;
➔ Les impôts sur le résultat.

- Ce bénéfice est réparti entre les dividendes et les réserves.

- Le PER exprime la « charité » d'un titre par rapport au dernier bénéfice connu ; il doit être interprété de manière relative à son secteur et son marché.
- Lorsque le PER d'une société vaut 10, cela veut dire que si la société réalise un bénéfice constant, l'investissement est récupéré en dividende après 10 ans (sans tenir compte de l'intérêt sur les flux financiers).

4. Taux de rendement (portefeuille)

Est défini comme la moyenne pondérée des taux de rendement des titres qui le composent.

- La pondération est faite par rapport à la valeur initiale de chaque titre du portefeuille.

➔ Si la valorisation du portefeuille au moment « t » est connue « VAL (t) :

$$\text{TR (portefeuille)} = \frac{\boldsymbol{VAL}\ (\boldsymbol{t}) - \boldsymbol{VAL}\ (\boldsymbol{t}-\mathbf{1})}{\boldsymbol{VAL}\ (\boldsymbol{t}-\mathbf{1})}$$

5. Rendement du marché

Est définie comme si le marché était un gigantesque portefeuille. La pondération de chaque valeur est prise en fonction de sa capitalisation boursière au moment initial de la période considérée.

➔ On prend généralement le rendement de l'individu de l'indice boursier comme un proxy du rendement du marché puisque l'indice reflète l'intégralité des actions composant le marché boursier (MASI, CAC40, etc.).

6. Paramètres d'évaluation des actions

Placement à un an : 0 ——— 1

$-P_0$ $\quad$ $Div_1 + P_1$

Actualisation des dividendes : $\mathbf{P_0} = \frac{\mathbf{Div1 + P1}}{\mathbf{1+}\boldsymbol{rcp}}$

- Avec :

r_{cp} : est le coût des capitaux propres, il correspond au taux de rendement requis des actionnaires d'une entreprise en égard à la rémunération qu'ils pourraient obtenir d'un placement présentant le même profil de risque sur le marché.

$$\mathbf{P_{cp}} = \frac{\mathbf{Div1 + P1}}{\mathbf{P0}} - \mathbf{1} = \underbrace{\underbrace{\frac{\mathbf{Div}}{\mathbf{P0}}}_{\text{Rendement}} + \underbrace{\frac{\mathbf{P1 - P0}}{\mathbf{P0}}}_{\text{Taux de plus-value}}}_{\text{Rentabilité}}$$

- Où :

$\frac{\text{Div}}{\text{P0}}$: est le rendement ;

$\frac{P1 - P0}{P0}$: taux de plus- value.

➔ Leur somme correspond à la rentabilité.

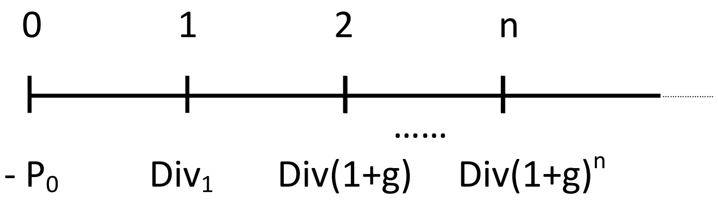
- Placement sur plusieurs périodes :

$$\mathbf{P_0} = \frac{\mathbf{Div1}}{\mathbf{1+rcp}} + \frac{\mathbf{Div2}}{\mathbf{(1+rcp)^2}} + \dots\dots\dots + \frac{\boldsymbol{DIV_N + P_N}}{\mathbf{(1+rcp)^N}}$$

Si l'horizon d'investissement est inconnu : $\mathbf{P_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\boldsymbol{DIV_N}}{\mathbf{(1+rcp)^N}}$

7. Le modèle de Gordon-Shapiro

- Consiste à supposer que le taux de croissance de dividende est constant à l'infini :



- On peut montrer que le prix de l'action à la date t_0 est donné par :

$P_0 = \frac{\mathrm{Div1}}{\mathrm{rcp-g}}$

- Le coût des capitaux propres r_{cp} est donné par :

$$r_{cp} = \frac{DIV_1 + P_1}{P_0} - 1 = \frac{DIV_1}{P_0} + \frac{P_1 - P_0}{P_0}$$

- Donc :

$$P_0 = \frac{DIV_1}{\mathrm{rcp-g}} \quad \Rightarrow \quad r_{cp} = \frac{DIV_1}{P_0} + g$$

- Donc : $g = \frac{P_1 - P_0}{P_0}$ => taux de plus-value.

8. Limite du modèle Gordon-Shapiro

- Prévision des dividendes complexes.

- Sensibilité du prix à l'évaluation de g :

$$\frac{\gamma po}{\gamma g} = \frac{DIV_1}{(rcp-g)^2}$$

➔ Faible modification de la provision de « g » a des conséquences importantes sur la valeur de P_o.

9. Arbitrage entre dividende actuel ou futur

Dans le modèle de Gordon-Shapiro P_o dépend positivement :

- Du prochain dividende (div) ;
- Du taux de croissance espéré (g).

L'entreprise qui veut maximiser la valeur de ses actions doit maximiser les deux variables : (Div, g).
Arbitrage :

- Augmenter le taux de croissance de dividende (g).
- Investir : les capitaux utilisés ne peuvent pas être distribués aujourd'hui sous forme de dividendes.

10. Le modèle de croissance simple

Pour être capable de verser des dividendes futurs élevés, l'entreprise doit accepter de verser aujourd'hui des dividendes faibles et réciproquement.
Soit d_t le taux de distribution des dividendes :

$$\mathbf{Div_t} = \underbrace{\frac{\textit{Bénéfices } t}{\textit{Nombre d'actions émises}}}_{\text{Bénéfice par action } (BPA_T)} \mathbf{\times\ dt}$$

L'entreprise ne peut augmenter le dividende que de trois façons :

- Augmenter le bénéfice ;
- Augmenter le taux de distribution des dividendes (d_t), on suppose constant ;
- Réduire le nombre d’actions en circulation (rachats d’action).

$$\mathbf{BPA_{t+1} - BPA_t} = \frac{\boldsymbol{NI\ X\ rentabilit\acute{e}\ NI}}{\boldsymbol{Nombre\ d'actions}}$$

Où :

NI : Nouveaux investisseurs

NI = (1-dt) Bénéfices = (1-dt) x BPA_t x Nombre d’actions

$$\text{Taux de croissance du bénéfice} = \frac{BPA_{t+1} + BPA_t}{BPA_t}$$

$$= (1 - d_t) \text{ rentabilité des NI}$$

➔ g=(1-d) x rentabilité des NI.

L’augmentation du taux de croissance (des bénéfices) peut être obtenue en distribuant moins de dividendes.

11. Modèle d'actualisation des dividendes augmentés

En pratique, l'entreprise peut utiliser la trésorerie excédentaire pour racheter ses actions ➔flux versés aux actionnaires ont des dividendes.

Implication du rachat d'action :

➔L'entreprise verse moins de dividendes ;
➔Augmentation du dividende par action.

$$P_0 = \frac{\mathbf{VA(Div+rachat\ d'actions)}}{\mathbf{Nombre\ d'actions}}$$

Où :

Div+ rachat d'actions : sont les flux versés aux actionnaires.

- **Illustration :**

➔ Entreprise avec 217 millions d'actions et bénéfice anticipé dans un an de 860 MDH.
➔ Reversement aux actionnaires de 50 % (30 % en dividendes et 20 % en rachat d'actions).
➔ Taux de croissance du bénéfice supposé : 7,5 % .
➔ Taux de distribution des dividendes constant et coût des capitaux propres : 10 % .

- Prix de l'action :

Montant total de versement **:** 50 % x 260 = 430 MDH

VA (Div + rachat d'actions) = $\frac{430}{0.10-0.75}$ = 17.2 MDH

P_0 = $\frac{17{,}2\ (GDH)}{217\ (MDH)}$ = 79,26 DH / action

Dividende par action : 30 % x 860 / 217 = 1,19 DH

Rendement de l'action : 1,19 / 79,26 = 1,5 %

Taux de croissance du prix de l'action (plus-value) :

g= r_{cp}- (Div_1 / P_o) = 10 % - 1,5 %

= 8,8 %

Chapitre 4 : Modèle d’évaluation des Actifs Financiers (MEDAF)

Plan du chapitre 4:

1. Présentation
2. Diversification et théorie des choix de portefeuille de Markowitz
3. Représentation matricielle du portefeuille
4. Plan rentabilité –risque
5. Frontière efficiente en l'absence d'actif sans risque
6. Frontière efficiente en présence d'actif sans risque
7. Ratio Sharp
8. Frontière efficiente singulière
9. Portefeuille tangente
10. L'équilibre du marché
11. Portefeuille de marché et droite de marché à l'équilibre
12. Évaluation des actifs et droite caractéristique d'un actif
13. Modèle de marché de Sharp
14. Risque systématique et risque spécifique
15. Élimination du risque spécifique par diversification
16. Diagramme de Wagner et Lau
17. Implications du MEDAF
18. Utilité du MEDAF
19. Problèmes du MEDAF

1. Présentation

Le MEDAF donne une évaluation de la rentabilité espérée d'un actif μ_i en fonction du « risque ».
Cette rentabilité espérée peut être utilisée comme taux d'actualisation de la valorisation de l'actif.

2. Diversification et théorie des choix de portefeuille de Markowitz

La diversification (théorie des choix de portefeuille de Markowitz) : Investisseurs, les investisseurs devraient exiger des rendements élevés pour détenir des actifs à risque élevé.

Un portefeuille est constitué de plusieurs (N) actifs dont les taux de rentabilité sont considérés comme des variables aléatoires R_i, dont les propriétés statistiques sont connues (observation des séries passés).

Valeur d'un actif en t : Vi_1t ➔rentabilité arithmétique de l'actif : $\mathbf{R_i} = \frac{V_{i,1}-V_{i,0}}{V_{i,0}}$

- Espérance : $E(R_i) = \mu_i$ → rentabilité moyenne ;
- Variance : $V(R_i) = б_i^2$ → $б_i$ « risque » ;
- Covariance cov (Ri, Rj) = бij = бj
- Coefficient de corrélation : $p_{ij} = \frac{б_i}{б_i\, б_j}$

Valeur d'un portefeuille contenant μ_i actif : i=1,….,N

$$\mathbf{Vp,t} = \sum_{i=1}^{N} n_i - V_{i,t}$$

Part de l’actif « i » dans le portefeuille : **xi** = $\boldsymbol{\frac{niVi,0}{Vp,0}}$

Rentabilité arithmétique du portefeuille : Rp = $\frac{V_{p,1}-V_{p,0}}{V_{p,0}} = \sum_{i=1}^{N} xi.Ri$

3. Représentation matricielle du portefeuille

Portefeuille ➔ un vecteur d’actif : $X'=[x_1,.....,x_i,.....x_N]$
Rentabilité des actifs : $R'=[R_1,.....,R_i,.....R_N]$

Matrice de variances-covariances de N actifs :

$$\Omega = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma_1}^2 & \boldsymbol{\sigma_{1,j}} & \boldsymbol{\sigma_{1,N}} \\ \boldsymbol{\sigma_{i,1}} & \boldsymbol{\sigma_{1,j}}^2 & \boldsymbol{\sigma_{i,N}} \\ \boldsymbol{\sigma_{N,1}} & \boldsymbol{\sigma_{N,j}} & \boldsymbol{\sigma_N}^2 \end{bmatrix}$$

Rentabilité du portefeuille : $R_p = X'R = \sum_{i=1}^{N} xi.Ri$

Espérance de la rentabilité : $\mu_p = E(R_p) = X'\epsilon(\mathbb{R}) = \sum_{i=0}^{N} xi.Ri$

Variance de la rentabilité : $V(R_p) = X'\Omega X$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_i.x_j\sigma_{ij}$$

Exemple :

Portefeuille constitué de deux titres, en proportions x et (x-1) :
Espérance de la rentabilité : $\mu_p = x\mu_1 + (1-x)\ \mu_2$
Variance de la rentabilité : $\sigma^2_p = x^2\ \sigma^2_1 + (1-x)^2\ \sigma^2_2 + 2x(1-x)\ \sigma_{1,2}$
$= x^2\ \sigma^2_1 + (1-x)^2\ \sigma^2_2 + 2x(1-x)\ \sigma_1 .\ \sigma^2_2 .\ \rho_{1,2}$

4. Plan rentabilité – risque

Dans la théorie de Markowitz, les caractéristiques essentielles d'un titre ou d'un portefeuille sont sa rentabilité moyenne et son risque.

➔ La constitution d'un portefeuille permet de diminuer le risque (mesuré par la variance de la rentabilité).
Si : $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, alors :
$\sigma_p{}^2 = [x^2 + (1-x)^2 + 2x(1-x)\ \rho_{1,2}]$ɤ^2 =$[1-2x(1-x)(1- \rho_{1,2})]\sigma^2$

- Pour : $\rho_{1,}$
$_{.032}$=1 , $\sigma_p = \sigma^2$ quelque soit la composition du portefeuille (x).

- Pour : $\sigma_{1,2} < 1$, $\sigma_p{}^2 < \sigma^2$ quelque soit la composition du portefeuille (x).

Markowitz (1952) montre que les bénéfices de la diversification dépendent des corrélations.

- Corrélation=1 ➔les actifs sont des substituts (leurs rentabilités varient dans le même sens, dans des proportions fixes : Ri= b.Rj+a , avec : b=0.

- Corrélation=-1 ➔ les actifs s'assurent mutuellement (leurs rentabilités varient en sens inverse, dans des proportions fixes : Ri=b.iy+a avec b < 0.

- Corrélation=0 ➔ par le lien entre les rentabilités.

Apports de Markowitz :

➔L'intérêt de la diversification ne repose pas sur l'absence de corrélation entre les rentabilités, mais sur leur imparfaite corrélation.

➔ La réduction des risques permise par la diversification est limitée par le degré de corrélation entre les actifs.

➔ La diversification du portefeuille permet de diminuer le risque, sans nécessairement diminuer la rentabilité moyenne.

Exemple1 :

Rentabilité moyenne en fonction de l'écart-type de rentabilité d'un portefeuille : 02 actifs pour diverses valeurs du coefficient de corrélation.

Avec :

μ_1=5% , μ_2=20%

σ_1=20%, σ_2=20% (même risque total)

$\sigma_p{}^2 = \sigma^2(x^2+(x^2+(1-x)^2+2x(1-x)\rho)$

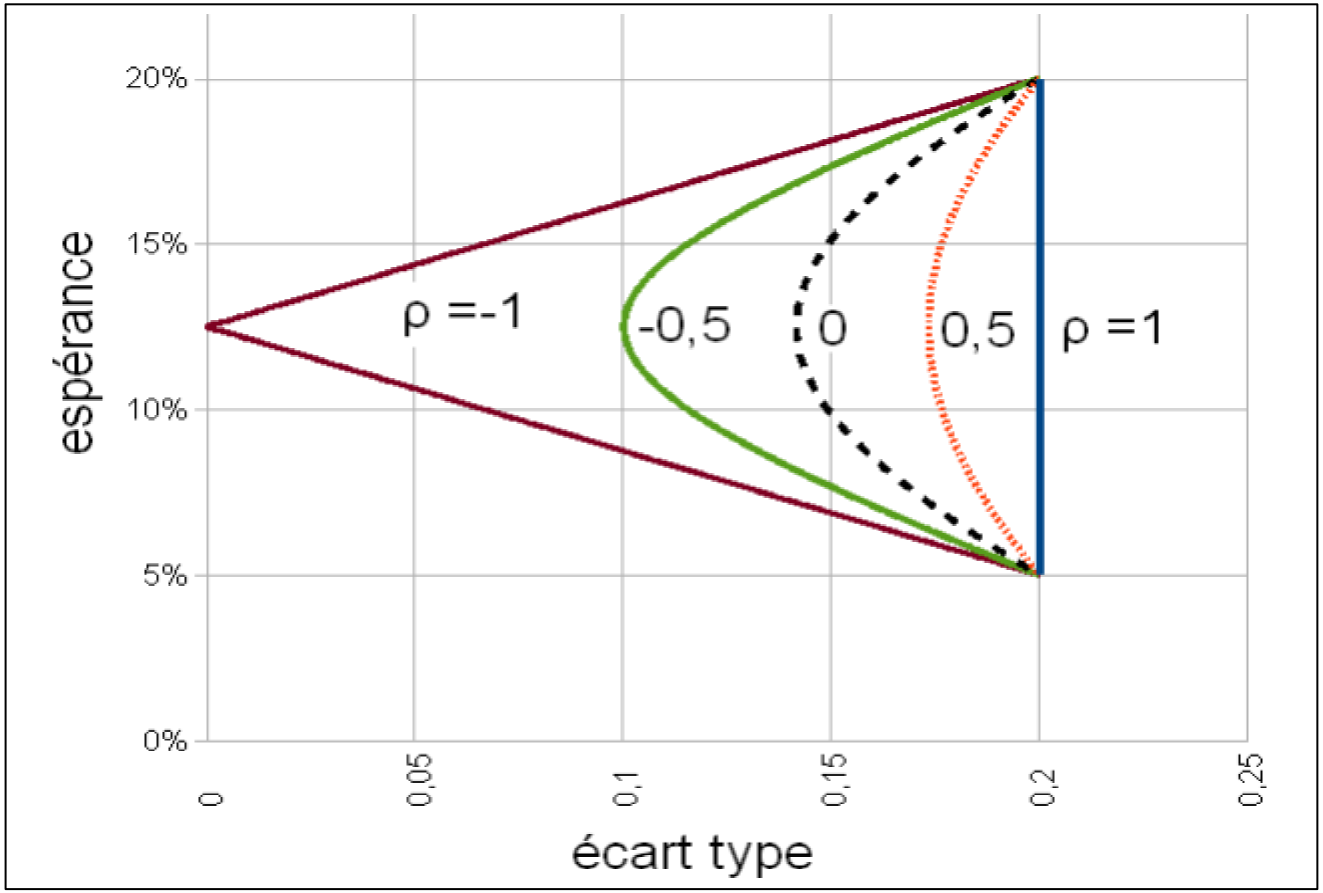
$\mu_p = 0.2 – 0.5x$

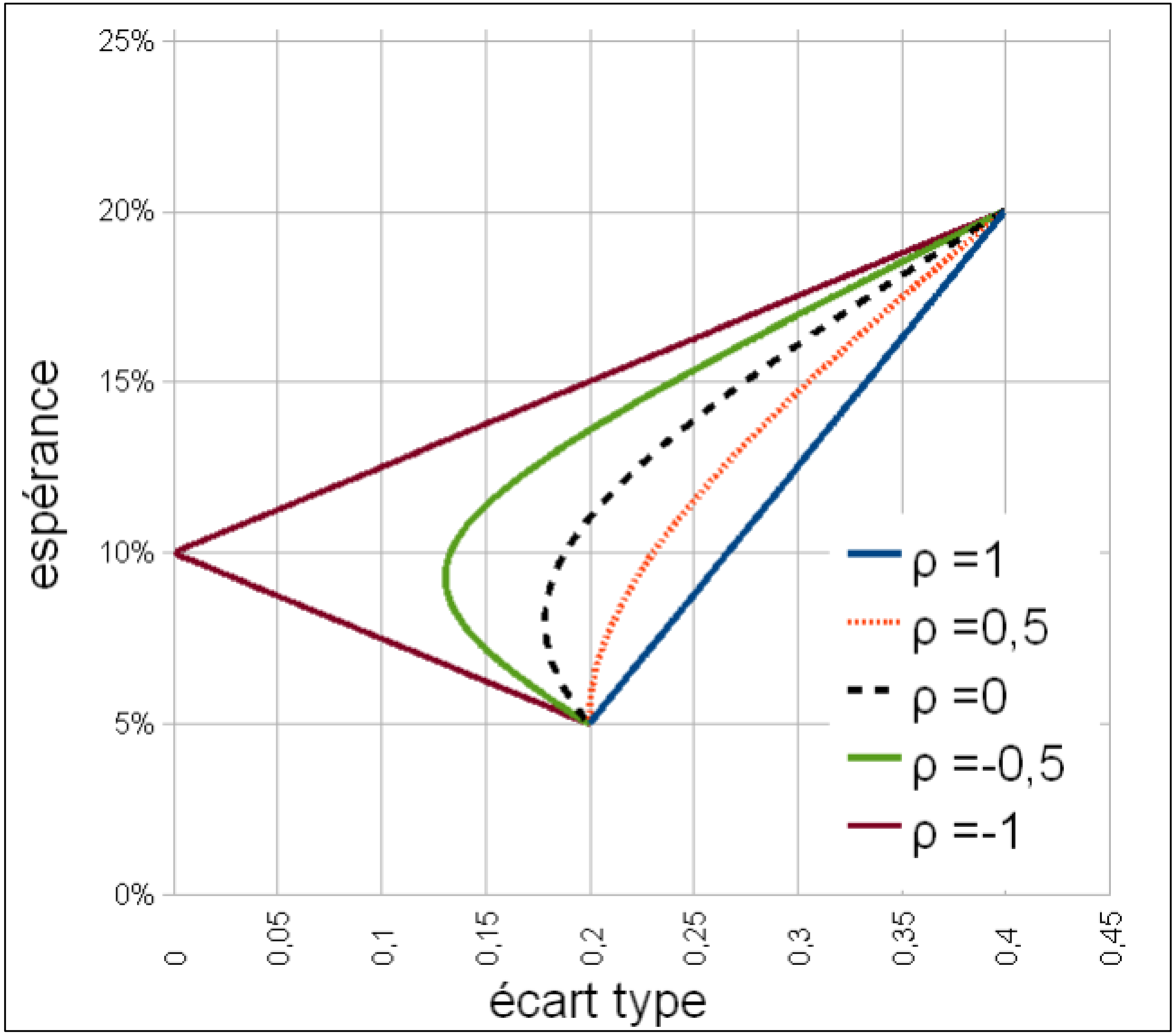
$\rho=0 \rightarrow \sigma_p{}^2 = \sigma^2 \quad \forall x$

$\mu_p = 0.2 - 0.5x$

$x=0$, $\mu_p=20\%$

$x=1$, $\mu_p= 5\%$

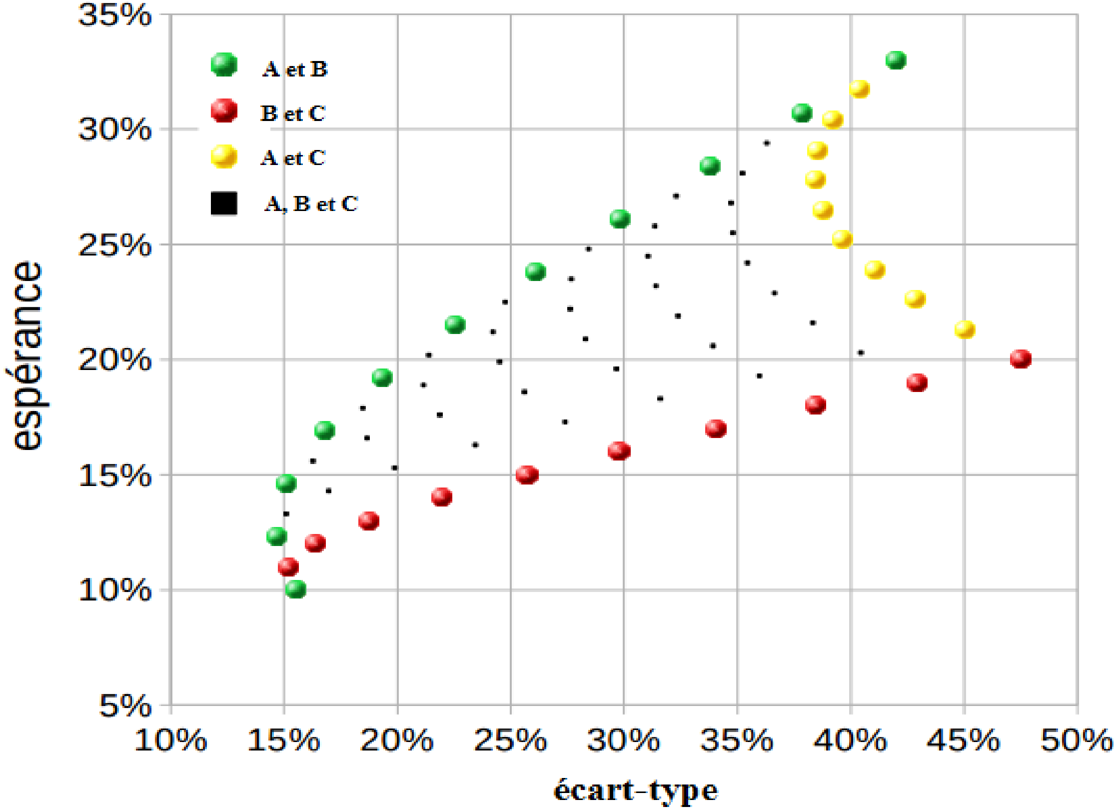



espérance
écart type
25%
20%
15%
10%
5%
0%
0
0,05
0,1
0,15
0,2
0,25
0,3
0,35
0,4
0,45
ρ =1
ρ =0,5
ρ =0
ρ =-0,5
ρ =-1

Exemple 2 : Rentabilité moyenne en fonction de l'écart-type de rentabilité d'un portefeuille à trois actifs, A, B et C.

	Coefficient de corrélation		
	A	B	C
A	1	0,02	0,5
B		1	0,1
C			1

	μ_i	σ_i
A	33 %	42,0 %
B	10 %	15,5 %
C	20 %	47,5 %



5. Frontière efficiente en l'absence d'actif sans risque (Markowitz)

Si on combine tous les titres « risqués » disponibles de toutes les manières possibles, on obtient l'ensemble des portefeuilles possibles, caractérisés par un taux de rentabilité moyenne µ et d'écart type Ϭ.
Parmi ces portefeuilles, figure le portefeuille du marché qui comprend tous les titres risqués pondérés par leur capitalisation.
Le portefeuille de marché a une rentabilité R_M de moyenne μ_M et d'écart type σ_M.
Un portefeuille **efficient** est un portefeuille dont la rentabilité moyenne est maximale pour un niveau de risque donné, ou dont le risque est maximal pour une rentabilité donnée.

Les portefeuilles efficients sont sur la « frontière » de l'ensemble des portefeuilles dans le plan (Ϭ, µ).

- Principe de détermination des portefeuilles efficients :

Max E(Rp)- λv(Rp)

λ : est un paramètre décrivant la frontière, peut être s'interpréter comme l'aversion ou risque d'un investisseur.
λ=0 : espérance de rentabilité maximale.
λ=∞ : variance de rentabilité minimale.
On peut montrer que : $\boldsymbol{\sigma^2 p = \sigma^2 v + \left(\frac{\mu p - \mu v}{a}\right)^2}$

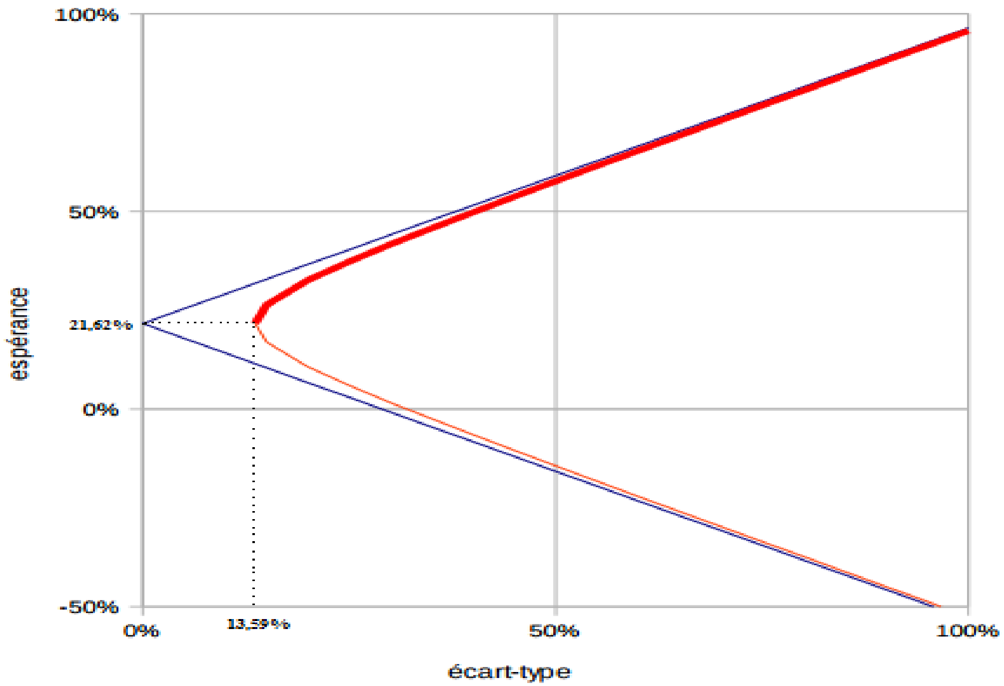
La frontière de l'ensemble des portefeuilles est une branche d'hyperbole d'équation :
$\mu = \mu \pm a\sqrt{\sigma^2 - \sigma^2 v}$ dans le plan (σ, μ).

Où :
a : est une constante qui correspond à la pente dans la branche asymptotique.

σv, μv : sont dans caractéristique du portefeuille de variance minimale.

Exemple :

La frontière efficiente « régulière » est la branche supérieure de l'hyperbole (portefeuilles dominants).



Les portefeuilles d'actifs risqués « efficient » vérifiant plusieurs propriétés :

1. Par construction, la rentabilité moyenne d'un portefeuille efficient est une fonction croissante du risque. (Si on modifie un portefeuille efficient de manière à augmenter la rentabilité moyenne, alors on est contraint d'augmenter le risque.
2. Toute combinaison linéaire de portefeuilles efficients est un portefeuille efficient (en particulier, le portefeuille de marché est efficient).
3. Toute la frontière régulière peut être généré par la combinaison linéaire de deux portefeuilles efficients quelconques.

6. Frontière efficiente en présence d'actif sans risque

L'actif sans risque paie un taux de rentabilité réelle fixe, sans risque de défaut (type d'obligations d'Etat).

7. Ratio Sharp

Dans un portefeuille comprenant :

- Un titre risqué, (σ_R , μ_R) en proportion x ;
- et un actif sans risque (0, r*f*) en proportion 1-x.

$R_p = xR_p + (1+x)r_f \Rightarrow \mu_p = x\mu_R + (1-x)r_f$ et: $\sigma_p = x\sigma_R$

D'où :

$\mu p = r_f + x\mu_R - XR_f$ (rentabilité espérée)

$= r_f + x(\mu_R - r_f)$, $E(R_p) = \mu_p$

$$=r_f + \frac{\mu_R - r_f}{\sigma_\rho} . \sigma_P \quad , \text{si } x \geq 0$$

$\frac{\mu_R - r_f}{\sigma_R}$ = s'appelle le ratio de Sharp du titre risqué ;

$\frac{\mu_P - r_f}{\sigma_\rho}$ = s'appelle le ratio de Sharp du portefeuille.

On a donc :

$$\frac{\mu_R - r_f}{\sigma_\rho} = \frac{\mu_P - r_f}{\sigma_\rho}$$

Le portefeuille a le même ratio de Sharp que l'actif risqué qu'il contient.

$\mu_P - r_f$: mesure la rentabilité excédentaire moyenne (rémunération du risque) ;

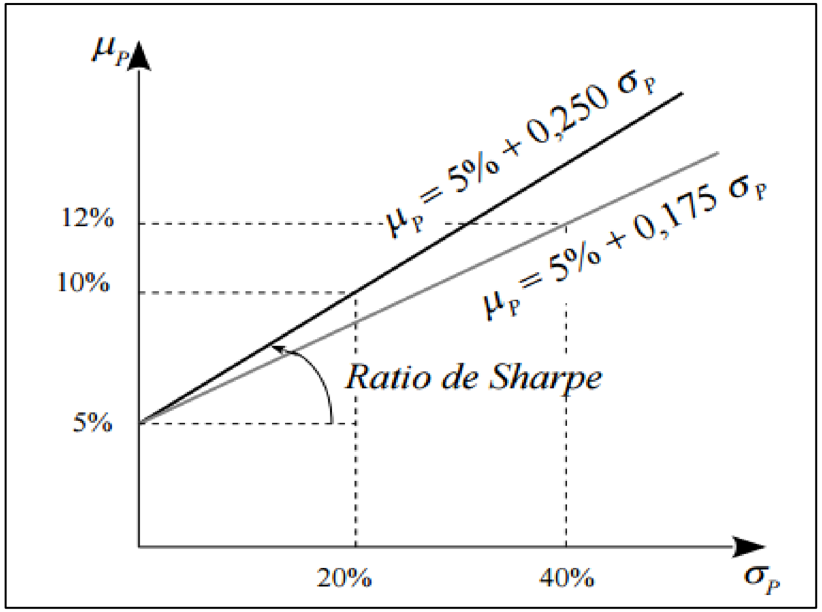
σ_p : mesure la quantité de risque.

Exemple :

- actif sans risque : r_f=5%

- actif risqué, de rentabilités :

- R1 caractérisé par (σ1, µ1) = (40%, 12%)
- R2 caractérisé (σ2, µ2) = (20%, 10%)

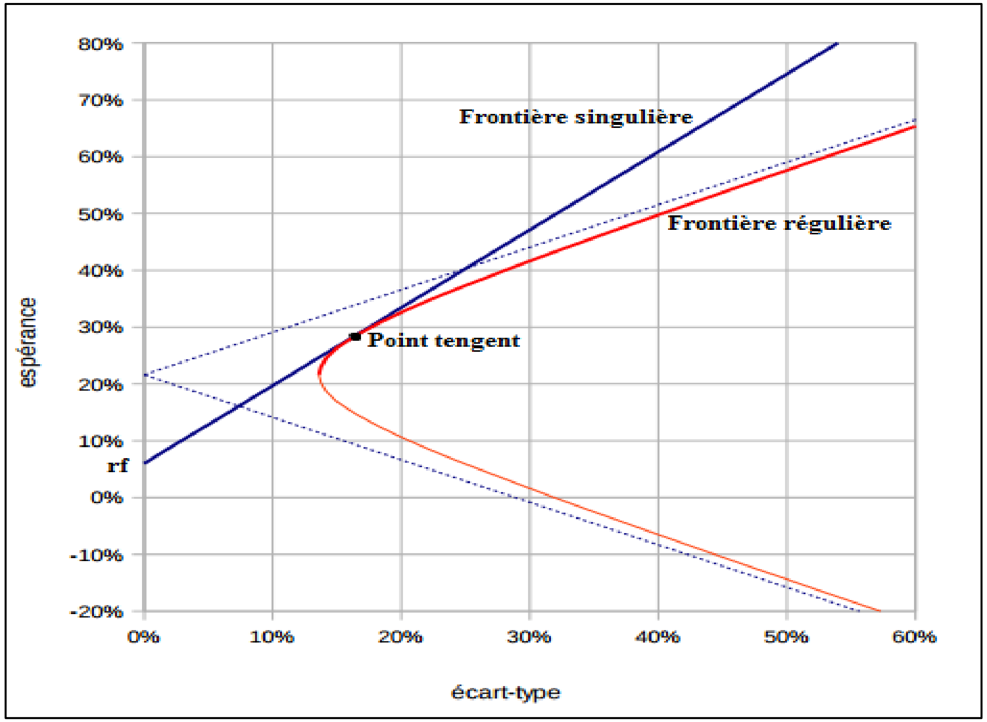


Tous les portefeuilles constituent l'actif sans risque et R_1 sont dominés par ceux qui constituent R_2 au lieu de R_2.

➔ Choisir le portefeuille ayant le ratio de Sharp le plus élevé.

8. La frontière efficiente singulière

Est la demi-droite qui relie le titre sans risque au portefeuille d'actifs risqués ayant le ratio de Sharpe le plus élevé (« portefeuille tangent »).



9. Portefeuille tangente

Maximiser le ratio de Sharp en choisissant Ϭ, sous la contrainte d'appartenance à la frontière régulière.

$\mathrm{Max}_{\sigma} = \frac{\mu - rf}{\sigma}$ sous contrainte $\mu = \mu_v + a\sqrt{\sigma^2 - \sigma_v^2}$

On obtient : $\mu_r = \mu_v + \frac{a^2 \sigma_v^2}{\mu_v - r_f}$,et : $\sigma_r^2 = \sigma_v^2 (1 + \frac{a^2 \sigma_v^2}{(\mu_v - r_f)})$

L'équation de la frontière singulière : $\mu = r_f + \frac{\mu_r - r_f}{\sigma_r} . \sigma$

10. L'équilibre du marché (Le MEDAF)

La théorie du portefeuille conseille de choisir un portefeuille risqué efficient ou un partage entre un actif sans risque et portefeuille d'actifs risqués selon le degré d'aversion au risque.
Le Modèle d'Évaluation Des Actifs Financiers « MEDAF » propose une détermination des prix d'équilibre des actifs.

- **Hypothèses :**

1. Des investisseurs évoluent des portefeuilles en termes d'espérances et de variance des rentabilités sur une période.
2. Les marchés de titres sont parfaits (actifs parfaitement diverses, pas de coûts de transactions, pas de restrictions de ventes à découvert, pas de taxes, information disponible sans coût, possibilité de prêt et d'emprunt au taux sans risque).
3. Les investisseurs ont accès aux mêmes opportunités d'investissement.
4. Les anticipations de rendement sont identiques.

Sous les hypothèses :
Tous les investisseurs déterminent :
→La même frontière efficiente régulière ;
→ Le même portefeuille tangent (ayant le ratio de sharp le plus élevé).

Alors :
A l'équilibre du marché, le portefeuille « tangent » est le portefeuille de marché.

11. Portefeuille de marché et droite de marché à l'équilibre

A l'équilibre :

- Le portefeuille « tangant » est le portefeuille de marché.
- La frontière « singulière » est appelée « droite de marché ».
Pour tous les portefeuilles efficients :
On a donc :
$\mu_P = r_f + \frac{\mu_M r_f}{\sigma_M} \text{X } \sigma_p$
Donc les portefeuilles ont le même ratio de Sharp, celui des portefeuilles de marché.
La rentabilité (à l'équilibre) de tout portefeuille efficient est la somme :
- du taux sans risque r_f.
- d'une prime de risque, qui s'écrit comme prix du risque ($\frac{\mu_M r_f}{\sigma_M}$) x quantité de risque σp.
Le ratio de Sharp s'interprète comme « prix du risque » et l'écart type de la rentabilité comme quantité de risque.

12. Évaluation des actifs et « droite caractéristique » d'un actif

Dans tout portefeuille efficient, on peut montrer que la prime de risque d'un actif particulier est proportionnelle à la prime de risque du portefeuille :

$\mu_i = r_f = \frac{cov(Ri,Rp)}{\sigma^2 p} x(\mu_p - r_f)$
Le facteur de proportionnalisation mesure la contribution marginale du titre « i » au risque des portefeuilles.

On montre en effet, en calculant l'accroissement en % de l'écart-type de R_p dû à un accroissement d'un point de % de la part du titre en portefeuille que :

$$\frac{d\sigma p/\sigma p}{dxi} = \frac{cov(Ri,Rp)}{\sigma^2 p}$$

- A l'équilibre du marché :

Le portefeuille de marché est efficient, la rentabilité dont vérifier :

$$\mu_i = \vartheta_f = \frac{(\vartheta_M - r_f)}{\sigma_M^2} \,.COV(R_i - R_M)$$

Interprétation :

Prime de risque = Prime du risque x quantité de risque (mesuré par la corrélation)

Autre expression :

En utilisant :

$$\rho_{iM} = \frac{cov\ (R_i, R_\mu)}{\sigma_i . \sigma_M}$$

$$\frac{\mu_i - r_f}{\sigma_i} = \rho_{iM} . \left(\frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M} \right)$$

Soit :

Ratio de Sharp du titre «i» = coefficient de corrélation des rendements du titre i et du marché x ratio de Sharp du portefeuille de marché

A l'équilibre : tous les titres ayant le même coefficient de corrélation avec le marché ont le même ratio de Sharp.

On appelle « bêta » du titre «βi » le paramètre : $\frac{cov(R_i,R_M)}{\sigma_M^2}$

Il représente :

➔ La sensibilité du rendement du titre au rendement du marché, c'est-à-dire la variation du rendement expliquée par celle du marché.

➔ Ou encore, la part de risque systématique ou risque non diversifiable contenu dans le risque total du titre.

A l'équilibre du marché, on a donc : $\mu_i=r_f=\beta_i(\mu_M-r_f)$.

13. Modèle de marché de Sharp

Modèle statistique sans fondement théorique, supposent que les rentabilités sont « normalement » distribués et que la régression linéaire par les MCO de Ri sur RM donne la relation :

$R_{it}=\alpha_i+\beta_i R_{Mt}+\varepsilon_{it}$ « droite caractéristique du titre ».

α_i , β_i sont les coefficients de régression du titre).

βi= $\frac{cov(R_i,R_M)}{\sigma_M^2}$

ε_{it} est le résidu, d'espérance nulle, non corrélé à R_{MT}.

D'où l'idée de considérer la rentabilité du titre connue décomposable en deux parts : $R_i=\alpha_i+\beta_i R_M+\varepsilon_i$

En profitant l'espérance mathématique, on obtient :

$\mu_i=\alpha_i+\beta_i\mu_M$

14. Risque systématique et risque spécifique

$$R_i=\alpha_i+\underbrace{\beta_i R_M}_{1}+\underbrace{\varepsilon_i}_{2}$$

Le rendement du titre varie pour deux raisons principales :

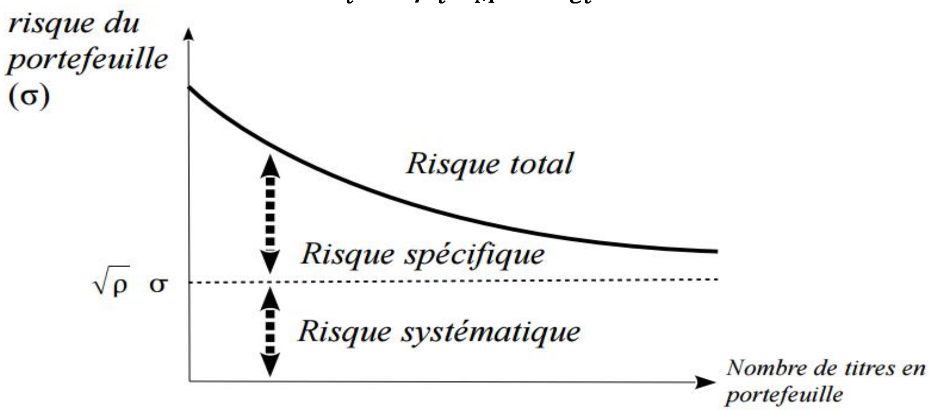
1. L'influence du marché ➔β_i mesure la sensibilité du rendement du titre au rendement du marché.

Si $\beta i<1$: alors le rendement du titre varie mois celui du marché➔ on dit que le titre est « défensif »
Si $\beta i>1$: alors le rendement du titre varie plus que celui du marché➔ on dit que le titre est « offensif ».

2. Des causes spécifiques : ➔εi

Le risque total du titre (mesuré par la variance de la rentabilité) vaut :

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 o_M^2 + \sigma_{\varepsilon i}^2$$



Soit :
Risque total= Risque systématique (non diversifiable) + Risque spécifique (non systématique, diversifiable).
➔ Le risque systématique : est d'origine macroéconomique ; croissance économique ; crises ; mouvements de taux d'intérêt, incertitudes géopolitiques, etc.).
➔Le risque spécifique : est d'origine microéconomique : grèves dans l'entreprise, contrats décrochés, changements de goûts des consommateurs, poursuites judiciaires, etc.).

15. Élimination du risque spécifique par diversification

La rentabilité d'un portefeuille à N titres est la moyenne des rentabilités des titres :
$R_p=\sum_{i=1}^{N} xi.Ri$

En décomposant la rentabilité de chaque titre on a :
Selon le modèle de marché de Sharp : $R_i= \alpha_i+\beta_i R_M+ \varepsilon_i$
On écrit la rentabilité du portefeuille comme :
$R_p=\sum_{i=1}^{N} x_i\, \alpha_i + \sum_{i=1}^{N} x_i\, \beta_i R_M + \sum_{i=1}^{N} x_i\, \varepsilon_i$
$R_p=\alpha_p + \beta_p R_M + \varepsilon_p$
Démonstration :

$$\sum_{i=1}^{N} x_i\, \beta_i = \sum_{i=1}^{N} x_i \frac{cov(R_i, R_M)}{r_M^2}$$

Or la covariance étant une fonction linéaire :

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \ cov(R_i, R_M) = \sum_{i=1}^{N} cov(x_i R_i, R_M) = cov\left(\sum_{i=1}^{N} x_i \, R_i, R_M\right)$$

$$\sigma_M^2 \sum_{i=1}^{N} x_i \, \beta_i = cov\left(\sum_{i=1}^{N} x_i \, R_i, R_M\right) = \mathrm{cov}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i R_i, R_M\right)$$

$$\sigma_M^2 \sum_{i=1}^{N} x_i \, \beta_i = cov\left(\sum_{i=1}^{N} x_i \, R_i, R_M\right) = \mathrm{cov}(R_p, R_M) = \beta_p \sigma_M^2$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} x_i \, \beta_i = \beta_p$$

Le bêta d'un portefeuille est égal la moyenne pondérée des bêtas des titres qui le composent.
D'où la décomposition du risque total du portefeuille en risque systématique et un risque spécifique :

$$\sigma_p^2 = \beta_p^2 . \sigma_M^2 + \sigma_{EP}^2$$

➔ En augmentant la part des titres dont le bêta est > 1, l'investisseur augmente la composante « systématique » du risque de portefeuille (sensibilité en risque de marché).
➔ En augmentant la part des titres dont le bêta < 1 , l'investisseur diminue la composante «systématique» du risque de portefeuille (sensibilité en risque de marché).
La composante spécifique du risque est diminuée en augmentant la variété des titres en portefeuille (diversification).
En effet, le risque spécifique est mené par σ_{EP}^2 qui vaut :
$\sigma_{EP}^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \, \sigma_{\varepsilon i}^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq i}^{N} x_i^2 \, cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$

Dans un portefeuille équipondéré : $x_i=1/N$

On note ṽ la variance moyenne et č la covariance moyenne :

$\tilde{v} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma_{\varepsilon i}^{2}$ et $\check{c} = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i} cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$

Alors : la variance de rendement du portefeuille s'écrit :

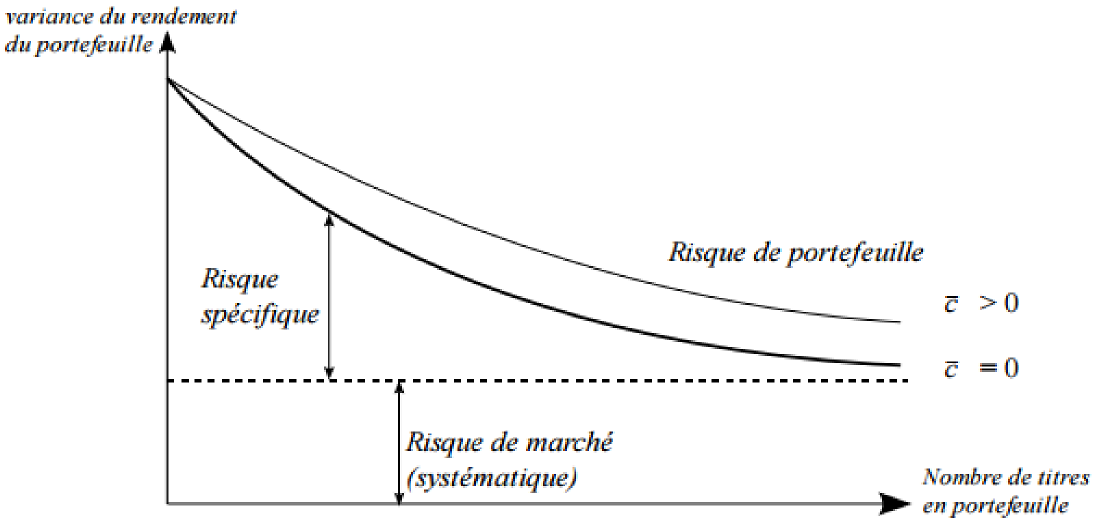
$$\sigma_p^2 = \frac{1}{N} + \frac{N^2 - N}{N^2} = \frac{1}{N}\tilde{v} + \left(1 - \frac{1}{N}\right)\check{c}$$

En augmentant le nombre des titres en portefeuille, le « risque » du portefeuille diminue, la covariance moyenne détermine le « socle » de risque spécifique qui subsiste après diversification.

N➔∞ => $\frac{1}{N} \sim > 0$

$(1 - \frac{1}{N})$ č => existe toujours, ∀ la diversification.

16. Diagramme de Wagner et Lau



17. 3.5- Implications du MEDAF

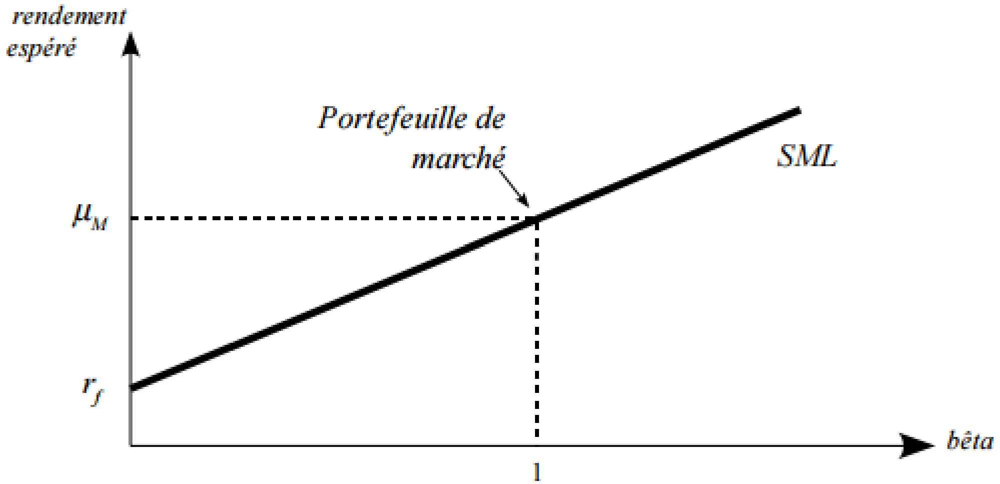
1°- La rentabilité espérée d'un titre ne dépend pas de son risque spécifique.

$$\mu_i = r_f + \beta_i(\mu_i - r_f)$$

→ La rentabilité (donc la prime de risque) d'un titre dépend de la prime de risque du marché et du bêta du titre.

2°- Le bêta indique la part du risque non diversifiable.

A l'équilibre, tous les portefeuilles et tous les actifs sont sur la « droite du MEDAF » (SML = Security Market Line).



Le bêta d'un portefeuille est égal à la moyenne pondérée des bêtas des titres qui le composent.

Le bêta du portefeuille de marché est égal à 1.

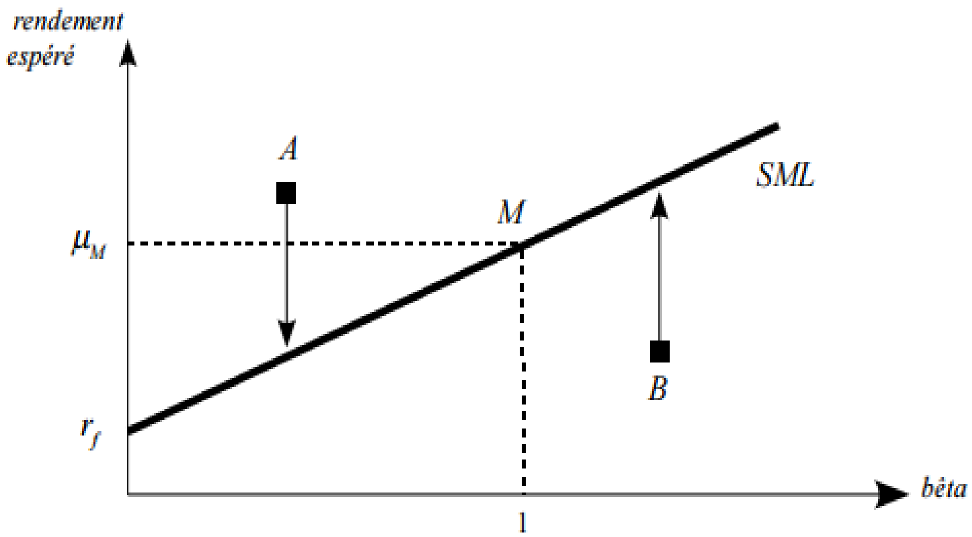
Un portefeuille efficient est composé de titres sans risques et du portefeuille de marché (théorème de séparation en deux fonds).

→ le bêta du portefeuille efficient mesure la fraction investie dans le portefeuille de marché !

Seul le risque non diversifiable (la fraction du portefeuille investi dans le portefeuille de marché) « mérite » une rémunération (une rentabilité supérieure au taux sans risque).

● Un titre A situé au-dessus de la SML est « sous-évalué » : sa rentabilité espérée est supérieure à celle d'un portefeuille efficient de même bêta, la demande pour ce titre devrait augmenter, ainsi que son prix (de sorte que sa rentabilité espérée diminue).

● Un titre B situé au-dessous de la SML est, au contraire, « sur-évalué » (son prix courant est supérieur au prix d'équilibre, sa rentabilité actuelle est inférieure à sa rentabilité d'équilibre).



18. L’utilité du MEDAF

1. Mesures de performances :

Une des applications le plus précoces du MEDAF : mesurer les performances des gestionnaires de fonds (ont-ils fait mieux que le marché ?).

2. Le MEDAF indique que le taux d’actualisation approprié pour évaluer les revenus futurs d’une entreprise ou d’un investissement est déterminé par :

- le taux sans risque ;
- la prime de risque d’un marché ;
- le bêta de l’entreprise ou du projet d’investissement

Le bêta peut être estimé par régression sur données historique, ou inféré du bêta d’entreprises comptables (pour les sociétés cotés).

19. Les problèmes du MEDAF

➔L’instabilité des bêtas : la covariance avec le marché varie dans le temps.
➔Les indices de marché utilisés (MADEX, MASI,..) ne reflètent pas le portefeuille de marché théorique (qui devrait englober tous les actifs, y compris non boursiers : immobilier).
➔ La prime de risque et difficile à estimer (le rendement moyen est très sensible au niveau des prix des actifs en début et fin de période d’estimation).
Le MEDAF a renouvelé la manière de concevoir la relation entre rentabilité attendue et risque, l’allocation des portefeuilles et la mesure des performances et du coût du capital.